

CIENCIA TECNOLOGÍA PRODUCCIÓN



Matemática

Funciones
y límites

6.º
SECUNDARIA

Organización del libro

El módulo de **Funciones y límites** del libro **Matemática 6** está organizado en dos unidades: **Funciones (Unidad 1)** y **Límites, continuidad y derivadas (Unidad 2)**.

2

Límites, continuidad y derivadas

1. Límites finitos en el infinito
2. Límites infinitos en el infinito
3. Límites infinitos en un punto
4. Cálculo de límites
5. Asíntotas
6. Continuidad de una función
7. Variación de una función
8. Derivada de una función en un punto

Recuerda

Pendiente de una recta
La pendiente m de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas.

Si conocemos dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la pendiente de la recta que pasa por ellos es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

La pendiente de una recta determina su inclinación:

- Si $m > 0$, entonces la recta es creciente.
- Si $m < 0$, entonces la recta es decreciente.
- Si $m = 0$, entonces la recta es horizontal.

Ecuación de una recta
Una recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y de pendiente m tiene por ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

La recta corta al eje de las ordenadas (Y) en el punto $(0, y - mx_1)$.

Composición de funciones
Se llama función compuesta de f con g y la función $g \circ f$ definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Páginas iniciales

La página de la izquierda contiene el índice de los temas desarrollados y muestra fotografías que ejemplifican las relaciones de esos temas con diversos aspectos de la sociedad, la cultura o la naturaleza.

La página de la derecha contiene la sección **Recuerda**; esta contiene información y actividades que te ayudarán a recordar conceptos y procedimientos matemáticos que ya has estudiado en años o momentos anteriores y que son un requisito para entender la unidad.

10. Funciones polinómicas y racionales

Funciones polinómicas
Se llama función polinómica de coeficientes reales y de grado n ($n \in \mathbb{N}$) a toda función definida en \mathbb{R} que puede escribirse bajo la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde:

- Los coeficientes son reales $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$.
- Los exponentes son enteros naturales $n, n-1, \dots, 1 \in \mathbb{N}$.

Las funciones polinómicas están definidas y son continuas en \mathbb{R} .

En sus algunos ejemplos:

- La función f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función polinómica.
- La función Q definida por $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ es una función polinómica.

Funciones polinómicas de grado cero (constantes)
Las funciones de grado cero tienen la forma $P(x) = a$, con $a, \neq 0$, es decir, son constantes. Su gráfica es la recta horizontal de ecuación $y = a$. (Imagen 7)

Funciones polinómicas de primer grado (lineales)
Las funciones polinómicas de grado 1 ($P(x) = ax + b$), con $a, \neq 0$, se llaman lineales. Si $a > 0$, la recta es creciente y si $a < 0$, la recta es decreciente. (Imagen 2)

Funciones polinómicas de segundo grado (cuadráticas)
Las funciones polinómicas de grado 2 ($P(x) = ax^2 + bx + c$), con $a, \neq 0$, son funciones parabólicas (su curva es una parábola). El punto de abscisa $x = -\frac{b}{2a}$ es el vértice de la parábola. La curva es cóncava si $a > 0$ y cóncava si $a < 0$.

Ejemplo
18. Determina el dominio de definición de la función f definida por $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$ y grafícala.

El dominio de definición de f es \mathbb{R} . La curva es cóncava pues $a = 2 > 0$. El punto de abscisa $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$ es el vértice de la parábola.

Funciones polinómicas de tercer grado (cúbicas)
Las funciones de grado 3 se escriben $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a, \neq 0$. Si $a > 0$, la curva es globalmente creciente pero puede tener una sección decreciente y si $a < 0$, la curva es globalmente decreciente pero puede tener una sección creciente. (Imagen 8)

Funciones racionales
Se llama función racional (o fracción racional) a toda función que puede escribirse como:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

con $Q(x) \neq 0$.

• P y Q son dos funciones polinómicas y Q es de grado ≥ 1 .

El dominio de definición de las funciones racionales es \mathbb{R} privado de los valores donde el denominador Q se anula. Estas funciones son continuas en su dominio.

En sus algunos ejemplos:

- La función f definida por $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 6}{x^2 + 1}$ es racional.
- La función g definida por $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 1}$ es una función racional para $x \neq 1$.

Asíntotas verticales
La curva de \mathbb{R} presenta una asíntota vertical en cada uno de los valores en los que la función Q se anula si el numerador no se anula en estos mismos valores.

Ejemplo
19. Determina el dominio de definición de la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$, la ecuación de su(s) asíntota(s) vertical(es) y grafícala.

No está permitida la división por cero, luego $x - 1 \neq 0$. Así el dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$. Como el numerador se anula en dos valores, podemos pensar que la curva de f tiene dos asíntotas verticales, en embargo, notamos que:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 1)} = \frac{x - 2}{x - 1}$$

Así, la asíntota vertical es $x = 1$.

Actividades

20. Determina el grado de las siguientes funciones polinómicas:

21. Determina el dominio de definición de la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, si existe y es cóncava o cóncava y grafícala.

22. Determina el dominio de definición de la función f definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y grafícala.

23. Determina el dominio de definición de la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$, si presenta alguna y grafícala.

Desarrollo de contenidos

Estas páginas desarrollan los nuevos contenidos y procedimientos matemáticos con explicaciones claras, recuadros que destacan las ideas fundamentales, ejemplos de problemas resueltos de manera razonada y varias actividades que te servirán para poner a prueba tu comprensión y para afianzarla.

En los márgenes encontrarás varios tipos de notas que te proporcionarán información adicional o te ayudarán a entender la información clave de estas páginas.

6. Continuidad de una función

Definición
La idea intuitiva de continuidad de una función en un intervalo es que el trazo de su curva representativa es continuo (no tiene interrupciones) en todo ese intervalo. La curva es un solo trazo.

Su f una función definida en un intervalo $A \subseteq \mathbb{R}$. Sea $a \in A$. La función f es continua en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. La función f es continua en el intervalo A si f es continua en todo real $a \in A$.

Representación gráfica
Cuando una función no es continua en un punto, se dibuja un círculo para poner en evidencia que ese es un punto que no pertenece a la curva.

La función es continua en el intervalo A . La función parece estar en un punto, se dibuja un círculo para poner en evidencia que ese es un punto que no pertenece a la curva.

Propiedades
La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo. Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \ln(x)$ y $f(x) = \tan(x)$ no son continuas en \mathbb{R} , pero sí lo son en los intervalos del tipo (a, b) con $a > 0$ y $b < \frac{\pi}{2}$.

Funciones usuales

- Las funciones polinómicas son continuas en \mathbb{R} .
- Las funciones racionales son continuas en su conjunto de definición.
- Las funciones con radicales son continuas en su conjunto de definición.
- Las funciones exponenciales son continuas en \mathbb{R} .
- Las funciones logarítmicas son continuas en su conjunto de definición.
- Las funciones trigonométricas son continuas en \mathbb{R} , excepto la función tangente que es discontinua en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- La función valor absoluto es continua en \mathbb{R} .
- Toda función compuesta de dos funciones continuas es continua.
- La suma, el producto y el cociente de dos funciones continuas es continua en su conjunto de definición.

Ejemplos

9. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida en $\mathbb{R} - \{1\}$. La función f es continua en su conjunto de definición, es decir en $\mathbb{R} - \{1\}$.

10. Estudia ahora la continuidad de la función $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ definida en \mathbb{R} . La función g es continua en \mathbb{R} pues $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 = g(2)$ y $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 = g(2)$.

11. Continuidad de la función definida por $f(x) = \frac{x + 2}{|x - 2|}$

- Determina el dominio de definición de la función.
- No está permitida la división por cero por lo que el dominio de definición es $\mathbb{R} - \{2\}$.
- Estudia los límites de f en $-\infty$, $+\infty$ y 2 .
Si $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$. Por lo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.
Si $x < 0$, $f(x) = \frac{x + 2}{-x - 2} = -1$. Por lo que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$.
- ¿Es posible prolongar f para que sea continua en \mathbb{R} ?
Se puede prolongar f en $x = 2$ definiendo una nueva función g tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ y $g(2) = 1$. Pero no es posible prolongar f en $x = 2$ para sus límites a la derecha ($+\infty$) y a la izquierda ($-\infty$) sino simplemente la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

Actividades

15. Determina el conjunto de definición y el intervalo [0, 1] de la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

16. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

17. ¿Se puede prolongar la función de la gráfica para que sea continua en \mathbb{R} ?

18. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

19. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

20. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

21. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

22. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

23. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

24. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

25. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

26. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

27. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

28. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

29. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

30. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

31. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

32. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

33. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

34. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

35. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

36. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

37. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

38. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

39. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

40. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

41. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

42. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

43. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

44. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

45. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

46. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

47. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

48. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

49. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

50. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

51. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

52. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

53. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

54. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

55. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

56. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

57. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

58. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

59. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

60. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

61. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

62. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

63. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

64. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

65. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

66. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

67. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

68. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

69. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

70. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

71. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

72. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

73. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

74. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

75. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

76. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

77. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

78. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

79. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

80. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

81. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

82. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

83. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

84. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

85. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

86. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

87. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

88. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

89. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

90. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

91. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

92. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

93. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

94. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

95. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

96. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$.

97. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -1$.

98. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 2$.

99. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -2$.

100. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$.

Taller de matemática

Límites laterales de una función

Calcula el límite lateral en Google, copia los límites laterales de una función en un punto.

Considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

El límite lateral de una función en un punto es muy importante en el cálculo de límites y se utiliza para calcular los límites de funciones trigonométricas y a partir de las ecuaciones que permiten transformar sumas de funciones trigonométricas en productos de funciones trigonométricas, entre otras.

Si notas de calcular los límites, nos encontramos frente a una forma indeterminada.

- Dibuja la gráfica de la función.

Abre tu explorador internet Firefox e ingresa a la página de búsqueda de Google. En la barra de búsqueda escribe la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y le avisa en el lugar de ser punto los conceptos de esta aplicación como en inglés y podrás verlo. Agrega en primer lugar el gráfico de la función y luego los resultados habituales de una búsqueda.

Puedes agregar y aplicar la gráfica mostrando el modo de cómo se calcula el límite lateral de la función de acuerdo a la izquierda y derecha.
- Explica los límites laterales cuando los valores de x tienden a 0 por la izquierda y por la derecha.

Para esto copia la gráfica y envíala a un punto sobre la curva. En la esquina superior derecha aparecen las coordenadas (x, y) de ese punto.

Observa los valores de la función cuando x se acerca a 0 por la izquierda y por la derecha. Anota los valores en una tabla.
- Gráfica las funciones siguientes y determina su límite en 0.

Nota que mientras más se acerca el valor de x a 0, tanto por la izquierda como por la derecha, el valor de la función aumenta más y más.

Por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Modelos matemáticos

Cálculo de velocidades

El objetivo es calcular la velocidad de un vehículo a partir de diferentes coordenadas.

El cilindro

¿Con qué velocidad llega el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico y vacuado, vacuándose a razón de 1000 litros por minuto?

Sea $V(t)$ el volumen de agua, medido en litros (l), que hay en el cilindro en el tiempo t medido en minutos. La información que nos dan es una tasa de variación:

$$V'(t) = 1000 \text{ litros por minuto}$$

La tasa de variación es negativa ya que el volumen disminuye con el tiempo. Como el radio es constante y la altura del agua depende del tiempo (la bajamos), tenemos:

$$V(t) = \pi r^2 h(t)$$

Derivamos los términos con respecto al tiempo t y obtenemos:

$$V'(t) = \pi r^2 h'(t) = 1000$$

Por tanto: $h'(t) = \frac{1000}{\pi r^2}$

También podemos expresar esta medida en metros por minuto:

$$h'(t) = \frac{1000}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{\pi r^2}$$

La tasa de variación de la altura en un intervalo de 1 minuto es una velocidad.

El cono

Se está llenando un depósito cónico invertido en un vertice a razón de 9 litros por segundo. La altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapa de 3 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

Sea $V(t)$ el volumen de agua que hay en el depósito en el tiempo t medido en segundos. $V(t) = \frac{1}{3} \pi r^2 h(t)$. Sabemos que $V'(t) = 9 \text{ litros por segundo}$.

Sea $h(t)$ la altura medida desde el vértice alcanzado por el agua en el tiempo t y $r(t)$ el radio de la sección transversal del cono a la distancia $h(t)$ desde el vértice. Por semejanza de triángulos obtenemos que $\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{3}{10}$, por lo que $r(t) = \frac{3}{10} h(t)$. Entonces, $V(t) = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3}{10} h(t)\right)^2 h(t)$.

- Expresa la tasa de variación del volumen con la última fórmula encontrada.
- Expresa la tasa de variación de la altura.
- Calcula la tasa de variación de la altura en $h(t) = 6$.

Hg10. Elige algún caso que puedas conseguir agua y determina su velocidad de llenado y vaciado.

Secciones especiales y actividades finales

En estas secciones el estudio de los temas de la unidad se sintetiza en las cuatro dimensiones del aprendizaje: Saber, Hacer, Ser y Decidir.

El **Taller de matemática** te ofrece la oportunidad de explorar los conceptos matemáticos desde una perspectiva novedosa e interesante que proporciona pautas de trabajo con material concreto, instrumentos geométricos, dispositivos de cálculo, programas de computadora de uso corriente o *software* matemático destinado a la educación.

Problemas resueltos

- Para cada representación gráfica, clasifica la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como inyectiva, suryectiva o biyectiva. Determina el rango de f .
 - $f(x) = 3$
 - $f(x) = 2x + 1$
 - $f(x) = x^2 + 3$

La función es inyectiva pues asigna valores del codominio que son la imagen de más de un valor del dominio. Por ejemplo, $f(1) = f(2) = 3$. Es decir, la imagen de todos los elementos del dominio es definición \mathbb{R} . Como no la imagen por f de ningún valor del dominio \mathbb{R} . Por ejemplo, 5 no tiene antimagen. Como la función no es inyectiva ni suryectiva, tampoco es biyectiva. El rango de f es $f(\mathbb{R}) = \{3\}$.
- Encar una función f creciente en el intervalo $[-2, 4]$ y decreciente en $[4, 8]$. Clasifica con verdadero o falso las siguientes afirmaciones justificando.
 - $f(-1) < f(4)$
 - $f(-2) > f(-1)$
 - $f(4) > f(8)$

Sabemos que f es creciente, entre a y b tal que $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$. Como f es creciente en $[-2, 4]$ y $-2 < -1 < 4$, entonces $f(-2) < f(-1) < f(4)$ es verdadero.

Sabemos que f es decreciente, entre a y b tal que $a < b$ entonces $f(a) > f(b)$. Como f es decreciente en $[4, 8]$ y $4 < 8$, entonces $f(4) > f(8)$ es verdadero.

Actividades de práctica y profundización

- Asocia cada curva con la función que representa.
 - $f(x) = 2^x + 1$
 - $f(x) = \frac{1}{2^x}$
 - $f(x) = 2^{-x} + 1$
 - $f(x) = 0.5^x - 1$
- ¿Cuáles de las siguientes curvas representan funciones biyectivas y cuáles funciones inyectivas?
 - $f(x) = \log_2 x$
 - $f(x) = \log_2 x + 1$
 - $f(x) = \log_2 x - 1$
 - $f(x) = \log_2 x + 2$
- Asocia cada curva con la función que representa.
 - $f(x) = \log_2 x$
 - $f(x) = \log_2 x + 1$
 - $f(x) = \log_2 x - 1$
 - $f(x) = \log_2 x + 2$

Trabajo cooperativo SER — HACER

Resuelve en grupos de tres o cuatro.

- Determina en qué intervalo es posible calcular la función inversa de cada una de las siguientes funciones. Calcula la función inversa y graficálas.
 - $f(x) = 2x + 5$
 - $f(x) = \sqrt{2x - 3}$
 - $f(x) = \frac{2}{x-2}$
 - $f(x) = 2x^2$

Verifiquen que las gráficas de las funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
- Sea la función f definida en \mathbb{R} por $f(x) = x^2$.
 - Determina que cuáles sean los reales x, y, z , se tiene que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ y $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
 - Determina que la función f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.
 - Estudien la paridad de f . Deduzcan las variaciones de f en $[-\infty, +\infty)$.
 - Estudien la tabla de variaciones de f .
 - Traen la curva representativa de f .
 - Compara con la curva representativa de f^{-1} que valores f es estrictamente la función cuadrática? ¿Para qué valores es inyectiva?
- La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es
 - $f(x) = 2$
 - $f(x) = 3$
 - $f(x) = 1$
 - $f(x) = 2$

Obtengan la expresión algebraica y representen las siguientes funciones.

Ciencia, tecnología y culturas

HACER — DECIDIR

- En un punto se hacen medidas sobre la altura que alcanza el agua. A causa de las mareas, esta varía bastante en el transcurso de un día. A continuación se muestra el gráfico del nivel del mar hecho durante un día.

Escríbanos h la función que el tiempo en horas indica la altura del agua en el puerto en metros.

 - ¿Cuál es la altura del mar a las 10 de la mañana?
 - Determina $h(5)$.
 - ¿A qué hora la altura es de 3 metros?
 - Resuelve gráficamente $h(x) \geq 7$.
 - Establezca la tabla de variación de h en el intervalo $[0, 24]$.
 - Sumamos que las medidas obtenidas entre mediodía y media noche pueden ser resueltas por la función: $[12, 24] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \frac{5}{12}(x - 12) + \frac{20}{12}(x + 18) = 5$
- El mensual de consumo de un vehículo afirma que el ruido producido por el motor es aproximadamente la función: $r = at^2 + 2,8t + 8$ donde r es el nivel de ruido medido en decibelios y t es el número de años de antigüedad del vehículo y a es un número fijo que se denomina coeficiente de amortiguación.

Un vehículo fue vendido cuatro años después de haber sido comprado y el informe en indica que el nivel de ruido fue de 27 decibelios.

 - ¿Cuál es el coeficiente de amortiguación?
 - ¿Cuántos decibelios producirá el vehículo a los 10 años?
- Una forma de arquitectos está diseñando un edificio circular de radio R . En la planta baja deben poner un jardín interior rectangular de la longitud l (en metros) y el ancho w (en metros).
 - Expresa el área del jardín interior circunscrito en el círculo de radio R en función de l y w .
 - Los arquitectos realizan un levantamiento para determinar el máximo valor que puede tener el área del jardín. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo en ese caso si $R = 5$ m?
 - ¿Qué tanto por ciento de la superficie del círculo (base del edificio) ocupa el rectángulo (jardín)?

La sección **Modelos matemáticos** desarrolla los fundamentos que permiten entender por qué determinados aspectos del mundo natural o cultural pueden entenderse mediante conceptos matemáticos y plantea actividades para utilizar o aplicar el modelo.

En la sección **Problemas resueltos** se exponen ejemplos adicionales con los que desarrollarás y profundizarás tu comprensión de las formas de razonamiento asociadas con los contenidos de la unidad. El estudio de esta sección te ayudará a abordar con éxito las actividades finales.

En la sección de **Actividades de práctica y profundización** encontrarás ejercicios y problemas que te servirán para consolidar y profundizar tus aprendizajes. Están clasificados de acuerdo con los temas de la unidad.

Las actividades de la sección **Ciencia, tecnología y culturas** exigen aplicar los conceptos matemáticos en situaciones contextualizadas.

Índice general

Módulo Lógica, conjuntos y probabilidad

Lógica

Lenguaje usual y lenguaje lógico
Tablas de verdad de los conectores lógicos
Tablas de verdad de proposiciones compuestas
Propiedades y relaciones lógicas
Leyes lógicas
Circuitos lógicos
Tipos de razonamiento

Conjuntos

Noción de conjunto
Relaciones entre conjuntos
Operaciones entre conjuntos
Álgebra de conjuntos
Cardinalidad de un conjunto
Producto cartesiano y relaciones

Probabilidad

Experimento aleatorio, sucesos elementales y espacio muestral
Operaciones con sucesos y relaciones entre sucesos
Definición de probabilidad: regla de Laplace
Propiedades de la probabilidad
Probabilidad condicional
Sucesos dependientes y sucesos independientes
Regla del producto y diagramas de árbol
Caso general y tablas de contingencia
Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes

Módulo Funciones y límites

Funciones

Definición de función y generalidades
Funciones reales de variable real
Variación de una función
Paridad y periodicidad
Continuidad y asíntotas
Transformación de funciones
Operaciones con funciones
Composición de funciones
Función inversa
Funciones polinómicas y racionales
Funciones irracionales y trigonométricas
Funciones exponenciales y logarítmicas

Límites, continuidad y derivadas

Límite finito en el infinito
Límite infinito en el infinito
Límite infinito en un punto
Cálculo de límites
Asíntotas
Continuidad de una función
Variación de una función
Derivada de una función en un punto

Módulo Funciones, derivadas e integrales

Derivadas

Función derivada
Reglas de derivación
Derivadas de funciones compuestas
Derivadas de funciones trascendentes
Aplicaciones de la derivada primera
Concavidad de una función
Análisis de funciones
Optimización

Funciones usuales

Funciones polinómicas
Funciones racionales
Funciones irracionales
Funciones en las que interviene el valor absoluto
Funciones definidas por tramos
Funciones exponenciales
Funciones logarítmicas
Funciones trigonométricas
Funciones inversas de las funciones trigonométricas

Integrales

Función primitiva
Integración de funciones usuales simples
Integración de funciones usuales compuestas
Integración por el método de sustitución
Integración por partes
Integral definida
Cálculo de la integral definida
Valor medio de una función

Índice FUNCIONES Y LÍMITES

Unidad

Páginas de desarrollo

1 Funciones



Definición de función y generalidades	8	Problemas resueltos	30
Funciones reales de variable real	10	Taller de matemática	34
Variación de una función	12	Modelos matemáticos	35
Paridad y periodicidad	14	Actividades de práctica y profundización	36
Continuidad y asíntotas	16	Ciencia, tecnología y culturas	41
Transformación de funciones	18		
Operaciones con funciones	20		
Composición de funciones	21		
Función inversa	22		
Funciones polinómicas y racionales	24		
Funciones irracionales y trigonométricas	26		
Funciones exponenciales y logarítmicas	28		

2 Límites, continuidad y derivadas



Límite finito en el infinito	44	Problemas resueltos	60
Límite infinito en el infinito	46	Taller de matemática	64
Límite infinito en un punto	48	Modelos matemáticos	65
Cálculo de límites	50	Actividades de práctica y profundización	66
Asíntotas	52	Ciencia, tecnología y culturas	69
Continuidad de una función	54		
Variación de una función	56		
Derivada de una función en un punto	58		